8 İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

8.1 Temel İntegrasyon Formülleri

Şimdiye kadar, integrandın ters türevlerini bularak elde ettiğimiz integral formüllerini, aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz.

1) $\int du = u + c$	13) $\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + c = -\ln\lvert\csc u\rvert + c$
2) $\int k\,du = ku + c$ (k bir sayı)	14) $\int e^u du = e^u + c$
3) $\int (du + dv) = \int du + \int dv$	15) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$ $(a>0, a\neq 1)$
4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \neq -1)$	16) $\int \sinh u\,du = \cosh u + c$
5) $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$	17) $\int \cosh u\,du = \sinh u + c$
6) $\int \sin u\,du = -\cos u + c$	18) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
7) $\int \cos u\,du = \sin u + c$	19) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
8) $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$	20) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left\lvert\frac{u}{a}\right\rvert + c$
9) $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$	21) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$, $a>0$
10) $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$	22) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$, $u>a>0$
11) $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + c$	
12) $\int \tan u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + c = \ln\lvert\sec u\rvert + c$	

Örnek 1: $\int (\sec x + \tan x)^2 dx = \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x)\,dx$

$$= 2\int \sec^2 x\,dx + 2\int \sec x \tan x\,dx - \int dx$$

$$= 2\tan x + 2\sec x - x + c$$

Örnek 2: $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \lvert\cos 2x\rvert\,dx$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \sqrt{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Örnek 3: $\int \frac{6x^2-x+2}{2x+1}dx$ integralini hesaplayınız.

$$\begin{array}{l|l} 6x^2-x+2 & 2x+1 \\ \hline -\ 6x^2+3x & 3x-2 \\ \hline \quad -4x+2 & \\ \quad -\ -4x-2 & \\ \hline \qquad 4 & \end{array}$$

$$\frac{6x^2-x+2}{2x+1} = 3x-2+\frac{4}{2x+1}$$

$$\int \frac{6x^2-x+2}{2x+1}dx = \int\left(3x-2+\frac{4}{2x+1}\right)dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2-2x+2\ln|2x+1|+c$$

Örnek 4: $\int \frac{2x-5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{2x-5}{\sqrt{1+x^2}}dx = 2\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx - 5\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$2\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \left[\begin{array}{l} 1+x^2=u^2 \\ 2xdx=2udu \end{array}\right] = 2\int\frac{u\,du}{u} = 2\int du = 2u+c_1 = 2\sqrt{1+x^2}+c_1$$

$$-5\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -5\sinh^{-1}x+c_2$$

$$c_1+c_2=c$$

$$\int\frac{2x-5}{\sqrt{1+x^2}}dx = 2\sqrt{1+x^2}+c_1-5\sinh^{-1}x+c_2 = 2\sqrt{1+x^2}-5\sinh^{-1}x+c$$

Örnek 5: $\int \sec x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int\sec x\,dx = \int\sec x.(1)dx = \int\sec x.\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}dx = \int\frac{\sec^2x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$$

$$\left[\begin{array}{l} u=\sec x+\tan x \\ du=(\sec x\tan x+\sec^2x)dx \end{array}\right] = \int\frac{du}{u} = \ln|u|+c$$

$$= \ln|\sec x+\tan x|+c.$$

Örnek 6: $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}=?$

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}\left[\begin{array}{l} 1+\sqrt{x}=u \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du \Rightarrow dx=2\sqrt{x}du=2(u-1)du \end{array}\right] = \int\frac{2(u-1)du}{u^3} = \int\left(\frac{2}{u^2}-\frac{2}{u^3}\right)du$$

$$= \frac{-2u}{u^2}+c = c-\frac{1+2\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}.$$

Örnek 7: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\cos x\,dx = ?$

x^3 tek fonksiyon, $\cos x$ çift fonksiyon olduğundan $x^3\cos x$ tek fonksiyondur. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ aralığı simetrik olduğundan $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\cos x\,dx = 0$ dır.

8.2 Kısmi İntegrasyon

$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ ve $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$ olduğundan $\int x.x\,dx \neq \int x dx . \int x dx$ dir. Genel olarak

$$\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx . \int g(x)dx$$

dir. İntegral, türev işleminin ters işlemi ve türevde $(f(x)g(x))' \neq f'(x)g'(x)$ olduğundan, burada da doğal olarak eşitlik sağlanmaz.

f ve g, x'in diferansiyellenebilir fonksiyonları ise

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

dir. Her iki taraf integre edilirse

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx \quad \text{düzenlersek}$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

elde ederiz. Bu formülü daha kolaylaştırmak için diferansiyel formda yazarız. $u=f(x)$, $v=g(x)$ ise $du = f'(x)dx$ ve $dv = g'(x)dx$ dir. Buna göre

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

dur. Buna kısmi integrasyon formülü denir.

Belirli integraller için formülün denkliği

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

dir.

Örnek 1: $\int x \cos x dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int x\cos x dx \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c.$$

Kısmi integrasyonda u ve dv nasıl seçilmelidir. Bu örnek üzerinde inceleyelim.

Mümkün olan dört seçeneğimiz var:

1) $u=1 \quad dv=x\cos x\,dx$ 2) $u=x \quad dv=\cos x\,dx$

3) $u=x\cos x \quad dv=dx$ 4) $u=\cos x \quad dv=x\,dx$

Seçenek 1: Bizim integre etmek istediğimiz ifade, dolayısıyla çalışmaz.

Seçenek 2: İyi çalıştığını gördük.

Seçenek 3: $du=(\cos x-x\sin x)dx \Rightarrow \int v\,du=\int(x\cos x-x^2\sin x)dx$ bu integral, verilen integralden daha kötü.

Seçenek 4: $v=\frac{x^2}{2} \Rightarrow \int v\,du=-\int\frac{x^2}{2}\sin x\,dx$, bu integralde çok kötü.

Örnek 2: $\int_1^e \ln x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_1^e \ln x\,dx \begin{bmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=x \end{bmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx = (e-0)-x\Big|_1^e$$
$$=1.$$

Örnek 3: $\int x^2e^x dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int x^2e^x dx \begin{bmatrix} u=x^2 & dv=e^x dx \\ du=2x\,dx & v=e^x \end{bmatrix} = x^2e^x-2\int xe^x dx \begin{bmatrix} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{bmatrix}$$
$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x dx\right)$$
$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

Örnek 4: $\int e^x\cos x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$I=\int e^x\cos x\,dx \begin{bmatrix} u=\cos x & dv=e^x dx \\ du=-\sin x\,dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$$

$$\begin{bmatrix} u=\sin x & dv=e^x dx \\ du=\cos x\,dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^x\cos x+e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\cos x\,dx}_{I}$$

$$2I=e^x\cos x+e^x\sin x \Rightarrow I=\int e^x\cos x\,dx=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C.$$

Örnek 5: İndirgeme Formülü $\int\cos^n x\,dx$ integralini $\cos x$'in daha düşük kuvvetinin bir integrali ile ifade ediniz.

$$\int \cos^n x\,dx \quad \begin{bmatrix} u = \cos^{n-1} x & dv = \cos x\,dx \\ du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x)\,dx & v = \sin x \end{bmatrix}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x\,dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1) \int \cos^n x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,dx$$

n pozitif tamsayı ise bu indirgeme formülü 2'şer azalarak

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad \text{veya} \quad \int \cos^0 x\,dx = \int dx = x + c$$

integralini verene kadar devam eder.

Örnek : $\int \cos^3 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \int \cos x\,dx$$

$$= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + c.$$

8.3 Trigonometrik İntegraller

Sinüs ve Cosinüsün Kuvvetlerinin Çarpımları

m ve n negatif olmayan tamsayılar ise

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

şeklindeki integraller, aşağıdaki üç duruma göre hesaplanırlar.

1. Durum! Eğer m tek ise $m=2k+1$ alınır ve $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ yazılırsa $\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x$ eşitliğini elde ederiz. Burada $u=\cos x$ alınarak integral çözülür.

2. Durum! Eğer m çift ve n tek ise $n=2k+1$ alınır ve $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ yazılırsa $\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x$ eşitliğini elde ederiz. Burada $u=\sin x$ alınarak integral çözülür.

3. Durum! Eğer m ve n çift ise $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ formülleri kullanılarak integrand $\cos 2x$'in daha küçük kuvvetlerine indirgenir.

Örnek1: $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x \, dx \quad \begin{bmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x \, dx \end{bmatrix}$$

$$= \int (1-u^2)u^2(-du) = \int (u^4-u^2)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Örnek2: $\int \cos^3 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x \, dx \quad \begin{bmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x \, dx \end{bmatrix}$$

$$= \int (1-u^2)du = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Bu integrali daha önce indirgeme formülü ile bulmuştuk. Sonuçun aynı olduğunu gösteriniz.

Örnek3: $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right] dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

Karekökleri Yok Etmek

$1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ veya $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ eşitliklerini kullanarak bir karekökten kurtulunabilir.

Örnek: $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx = ?$

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,dx \qquad [0,\pi/4]'\text{de } \cos 2x \geq 0$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \sqrt{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\tan x$ ve $\sec x$'in Kuvvetlerinin İntegralleri

Örnek 1: $\int \tan^3 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan^2 x \tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx = -\int \tan x\,dx + \int \tan x \sec^2 x\,dx$$

$$\left[\begin{matrix} u=\tan x \\ du=\sec^2 x\,dx \end{matrix}\right] = -\ln|\sec x| + \int u\,du = -\ln|\sec x| + \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \ln|\cos x| + \frac{\tan^2 x}{2} + c.$$

Örnek 2: $\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx = \int \tan^2 x\,(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx \quad \left[\begin{matrix} u=\tan x \\ du=\sec^2 x\,dx \end{matrix}\right]$$

$$= \int u^2(1+u^2)\,du = \int (u^2+u^4)\,du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c.$$

Sinüs ve Cosinüs Çarpımları

İntegrandları $\sin mx \sin nx$, $\sin mx \cos nx$ ve $\cos mx \cos nx$ olan integraller

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

dönüşümü yapılarak hesaplanırlar.

Örnek: $\int \sin 2x \cos 3x\,dx$ integralini hesaplayınız.

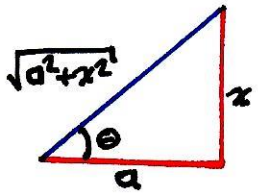
$$\int \sin 2x \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin(2-3)x + \sin(2+3)x\right]dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-x) + \sin 5x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + c.$$

8.4 Trigonometrik Dönüşümler

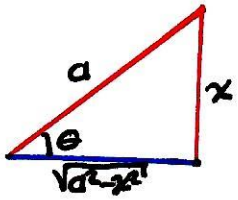
Trigonometrik dönüşümler, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ ve $\sqrt{x^2-a^2}$ yi içeren integralleri, doğrudan hesoplayabileceğimiz integrallere dönüştüren, dönüşümlerdir.

Üç Temel Dönüşüm



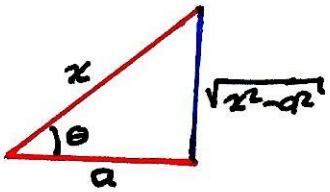
$x = a\tan\theta$

$\sqrt{a^2+x^2} = a|\sec\theta|$



$x = a\sin\theta$

$\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos\theta|$



$x = a\sec\theta$

$\sqrt{x^2-a^2} = a|\tan\theta|$

$$x = a\tan\theta \Rightarrow a^2+x^2 = a^2+a^2\tan^2\theta = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta$$
$$x = a\sin\theta \Rightarrow a^2-x^2 = a^2-a^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$$
$$x = a\sec\theta \Rightarrow x^2-a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta-1) = a^2\tan^2\theta$$

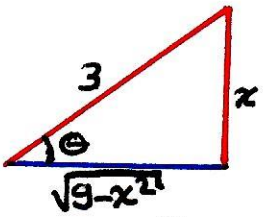
Bu dönüşümler ve integral aldıktan sonra, θ'yı bulmak gerektiğinde terslerinin tanımlandığı aralıkta olması gerekir.

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$
$$x = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$
$$x = a\sec\theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \begin{cases} 0 \le \theta < \pi/2, & \frac{x}{a} \ge 1, \\ \pi/2 < \theta \le \pi, & \frac{x}{a} \le -1. \end{cases}$$

Örnek 1: $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ integralini hesoplayınız.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} \left[\begin{array}{l} x = 2\tan\theta \\ dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{array} \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right] = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\, d\theta$$
$$= \int \frac{\sec^2\theta}{|\sec\theta|}\, d\theta \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \theta < \pi/2 \\ \sec\theta > 0 \end{array}\right] = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$
$$= \ln|\sqrt{4+x^2} + x| + C_1 \quad (C_1 = C - \ln 2).$$

Örnek 2: $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.



$\sin\theta = \frac{x}{3}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx \left[\begin{array}{l} x=3\sin\theta \\ dx=3\cos\theta\, d\theta \end{array}, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right] = \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta}{|3\cos\theta|}$$

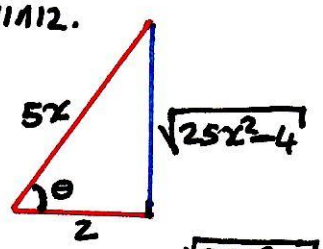
$$= 9\int \sin^2\theta\, d\theta = 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)+C$$

$$= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)+C = \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C.$$

$$\left(\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = -9\sqrt{9-x^2} + \frac{(9-x^2)^{3/2}}{3} + C \right)$$

Örnek 3: $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}$, $x>\frac{2}{5}$ integralini hesaplayınız.



$\tan\theta = \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}$

$\sec\theta = \frac{5x}{2}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-(\frac{2}{5})^2}} \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{5}\sec\theta \\ dx=\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta \end{array}, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right]$$

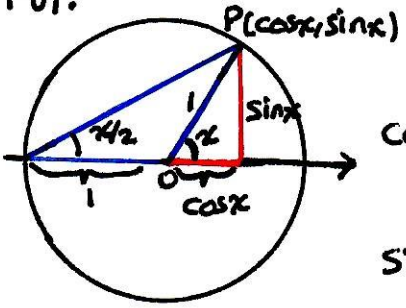
$$= \frac{1}{5}\int \frac{\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\frac{2}{5}|\tan\theta|} = \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C$$

$z = \tan\frac{x}{2}$ Dönüşümü

Bu dönüşüm, $\sin x$ ve $\cos x$'i içeren bir rasyonel integrasyonu, z'nin bir rasyonel fonksiyonunun integrasyonuna dönüştürür.



$$z = \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)}-1 = \frac{2}{1+\tan^2(x/2)}-1 = \frac{2}{1+z^2}-1$$

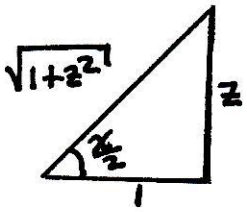
$$= \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x/2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\,\frac{1}{\sec^2 x/2}$$

$$= \frac{2z}{1+z^2}.$$

$$x = 2\tan^{-1}z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Veya $z = \tan\frac{x}{2}$



$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$dz = \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Örnek! $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ integralini hesoplayınız.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}\left[\begin{array}{ll} z=\tan\frac{x}{2}, & \sin x = \frac{2z}{1+z^2} \\ dx = \frac{2dz}{1+z^2}, & \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\end{array}\right] = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{2dz}{2+2z} = \int \frac{dz}{1+z} = \ln|1+z| + c = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

8.5 Basit Kesirlere Ayırmak

Bu bölümde, rasyonel fonksiyonları daha kolay integre etmek için basit kesirlere ayırma işlemini çalışacağız.

$$\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+2}=\frac{3(x+2)+5(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{8x+1}{x^2+x-2}.$$

$\int \frac{8x+1}{x^2+x-2}dx$ integrolini hesaplamak kolaydır:

$$\int \frac{8x+1}{x^2+x-2}dx=\int \frac{3}{x-1}dx+\int \frac{5}{x+2}dx=3\ln|x-1|+5\ln|x+2|+C$$

$\frac{8x+1}{x^2+x-2}$ rasyonel fonksiyonunu basit kesirlere ayırmanın bir yolu:

$$\frac{8x+1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

$$8x+1 = A(x+2)+B(x-1)=(A+B)x+2A-B$$

Eşitlik için $A+B=8$, $2A-B=1$ olmalıdır. Bu denklemin çözümü $A=3$, $B=5$ dir.

Bir $\frac{f(x)}{g(x)}$ rasyonel fonksiyonunu, basit kesirlerin toplamı olarak yazarken iki şeye dikkat etmek gerekir:

1) $f(x)$'in derecesi $g(x)$'in derecesinden daha küçük olmalıdır. Yani kesir öz kesir olmalıdır. Eğer değilse $f(x)$, $g(x)$'e bölünür, kalan terim basit kesirlere ayrılır.

2) $g(x)$'in çarpanları bulunmalıdır. Reel katsayılı herhangi bir polinom, reel lineer çarpanlar ve reel quadratik çarpanların bir çarpımı olarak yazılabilir. Pratikte, bu çarpanları bulmak kolay olmayabilir.

Eğer $g(x)$, $(x-r_1)$, $(x-r_2)^m$ ve $(x-r_3)^n$ gibi reel lineer çarpanlara ayrılıyorsa, $m+n+1$ basit kesirlere ayırıyoruz:

$$\frac{A}{x-r_1}+\frac{B_1}{x-r_2}+\frac{B_2}{(x-r_2)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(x-r_2)^m}+\frac{C_1}{x-r_3}+\frac{C_2}{(x-r_3)^2}+\cdots+\frac{C_n}{(x-r_3)^n}.$$

Eğer $g(x)$, $x^2+p_1x+q_1$, $(x^2+p_2x+q_2)^m$ ve $(x^2+p_3x+q_3)^n$ gibi reel quadratik çarpanlara ayrılıyorsa, $m+n+1$ tane basit kesirlere aşağıdaki gibi ayırıyoruz:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\dots+\frac{C_mx+D_m}{(x^2+p_2x+q_2)^m}+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_3x+q_3}+\dots+\frac{E_nx+F_n}{(x^2+p_3x+q_3)^n}.$$

Örnek 1: $\int \frac{-10x-7}{(x-2)(x+1)^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\frac{-10x-7}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ (*) şeklinde basit kesirlere ayrılır. Basit kesirlerin katsayılarını bulmanın birçok yöntemi vardır. Bu konunun girişindeki elementer yöntemin haricinde, en etkili yöntem birazdan anlatacağımız, limit (Heaviside) yöntemidir. Diğer yöntemler derste anlatılacaktır.

(*) eşitliğinin her iki tarafı $x-2$ ile çarpılır ve $x\to 2$ limit alınırsa A katsayısı bulunur. Bu, (*) eşitliğinin sol tarafında $x-2$'yi kapatıp x yerine 2 yazmakla aynıdır. Yani $A=\frac{-10(2)-7}{(2-2)(2+1)^2}=-3$ dür.

Benzer şekilde, C katsayısını bulmak için (*) eşitliğinin her iki tarafı $(x+1)^2$ ile çarpılıp, $x\to -1$ için limit alınırsa, $C=\frac{-10(-1)-7}{(-1-2)(x+1)^2}=-1$ dir. (*) eşitliğinde $x=0$ alınırsa $B=3$ bulunur. (x ile çarpılıp, $x\to\infty$ limit alınırsa da bulunur.)

$$\int\frac{-10x-7}{(x-2)(x+1)^2}dx=\int\frac{-3}{x-2}dx+\int\frac{3}{x+1}dx+\int\frac{-1}{(x+1)^2}dx$$
$$=-3\ln|x-2|+3\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$
$$=\ln\left|\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3\right|+\frac{1}{x+1}+C$$

Örnek 2: $\int\frac{x^3+3x^2+8x-3}{x^2+x-2}dx$ integralini hesaplayınız.

Payın derecesi paydadan daha büyük olduğundan, önce rasyonel fonksiyonu paydaya bölüp öz kesire indirgemeliyiz.

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+8x-3 & x^2+x-2 \\ \hline -\;x^3+x^2-2x & x+2 \\ \hline \quad 2x^2+10x-3 & \\ -\;2x^2+2x-4 & \\ \hline \qquad 8x+1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+3x^2+8x-3}{x^2+x-2}=x+2+\frac{8x+1}{x^2+x-2}$$

Öz kesiri, daha önce hesaplamıştık. Buna göre,

$$\int \frac{x^3+3x^2+8x-3}{x^2+x-2}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{8x+1}{x^2+x-2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x + 3\ln|x-1| + 5\ln|x+2| + c.$$

Örnek 3: $\int \frac{-x^2+12x+12}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\frac{-x^2+12x+12}{(x+2)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır. Katsayılar $A=1$ $B=-2$ $C=-1$ ve $D=3$ olarak bulunur. (Katsayılar derste bulunacak).

$$\int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx \left[\begin{matrix} u=x+2 \\ du=dx \end{matrix}\right] = -2\int \frac{du}{u^2} = -2\,\frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{2}{u} + c = \frac{2}{x+2} + c$$

$$\int \frac{-x+3}{x^2+4}\,dx = -\int \frac{x}{x^2+4}\left[\begin{matrix} u=x^2+4 \\ du=2x\,dx \end{matrix}\right] + 3\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \left[\begin{matrix} x=2\tan t \\ dx=2(1+\tan^2 t)\,dt \end{matrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{2(1+\tan^2 t)}{4\tan^2 t+4}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{3}{2}\int dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}t + c = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{-x^2+12x+12}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{-x+3}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{2}(x^2+4) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

Örnek 4: $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ integralini hesaplayınız.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır. Katsayılar $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$ ve $E=0$ olarak bulunur. (Katsayılar derste bulunacak).

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \left[\begin{matrix} u=x^2+1 \\ du=2x\,dx \end{matrix}\right]$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + c.$$

Örnek 5: $\int \frac{2x+1}{x^3+2x^2-3x}dx$ integralini hesaplayınız.

$g(x)=x^3+2x^2-3x=x(x^2+2x-3)=x(x-1)(x+3)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. $\frac{2x+1}{x^3+2x^2-3x}=\frac{2x+1}{x(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}$

şeklinde basit kesirlere ayrılır ve katsayılar $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{3}{4}$ ve $C=-\frac{5}{12}$ olarak bulunur.

$$\int \frac{2x+1}{x^3+2x^2-3x}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{3}{4}\ln|x-1|-\frac{5}{12}\ln|x+3|+C.$$

Örnek 6: $\int \frac{x-1}{(x+1)^3}dx$ integralini hesaplayınız.

$$\frac{x-1}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır. A, B ve C katsayılarını beraber bulalım. Eşitliğin her iki tarafını $(x+1)^3$ ile çarpalım:

$$x-1=A(x+1)^2+B(x+1)+C.$$

x yerine -1 yazarsak $C=-2$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafının x'e göre türevi alınırsa

$$1=2A(x+1)+B$$

elde edilir. Tekrar $x=-1$ alınırsa, $B=1$ bulunur. Tekrar her iki tarafın türevini alırsak

$$0=2A$$

elde ederiz. Yani $A=0$ dır. Bu durumda integral aşağıdaki gibidir.

$$\int\frac{x-1}{(x+1)^3}dx=\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{-2}{(x+1)^3}dx \quad \begin{bmatrix} u=x+1 \\ du=dx \end{bmatrix}$$

$$=\int\frac{du}{u^2}+(-2)\int\frac{du}{u^3}=-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+C$$

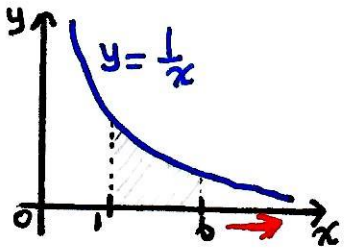
$$=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+C=-\frac{x}{(x+1)^2}+C.$$

8.8 Genelleştirilmiş İntegraller

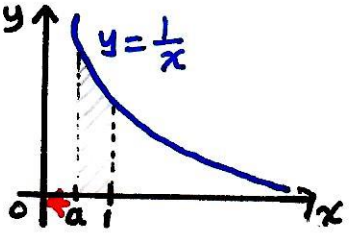
Belirli integral konusunu işlerken, integrasyon sınırı $[a,b]$'nin sonlu ve bu aralıkta integrandın sınırlı olması gerektiğini belirtmiştik. Eğer integrasyon sınırını sonlu almazsak veya integrand sınırlı olmazsa, integral tanımını anlamlı hale getirmeliyiz. Bu durumdaki integrallere, genelleştirilmiş integraller denir.

Örneğin $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ veya $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ integrallerini nasıl anlamlı hale getirmeliyiz?

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_1^b \frac{1}{x}dx}_{\text{integrasyon sınırı } [1,b] \text{ sonlu ve integrand } \frac{1}{x} \text{ sınırlı}}$$



$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+} \underbrace{\int_a^1 \frac{1}{x}dx}_{\text{integrasyon sınırı } [a,1] \text{ sonlu ve integrand } \frac{1}{x} \text{ sınırlı}}$$



Tanım: I. Tip Genelleştirilmiş İntegraller

1) $f(x)$ fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında sürekli ise
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

2) $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty,b]$ aralığında sürekli ise
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

3) $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ise c herhangi reel sayı olmaüzere
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$
olarak tanımlanır.

Bu limitler sonlu ise genelleştirilmiş integrale <u>yakınsak</u> ve integralin değeri limit olarak tanımlanır. Limit sonlu değilse genelleştirilmiş integrale <u>ıraksak</u> denir.

Örnek 1: $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx \begin{bmatrix} u=\ln x & dv=\frac{1}{x^3}dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3}dx=\frac{-1}{x^2}\ln x-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+C$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\ln x}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{x^2}\ln x-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{b^2}-\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b^2}-0+\frac{1}{4}=-\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{2b}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

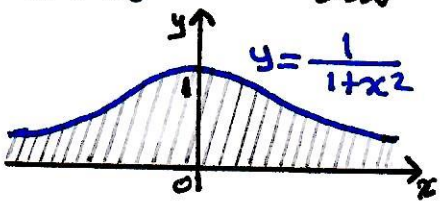
Genelleştirilmiş integral yakınsaktır.

Örnek 2: $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\tan^{-1}x\right|_a^0+\lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}x\right|_0^b=\lim_{a\to-\infty}(0-\tan^{-1}a)+\lim_{b\to\infty}(\tan^{-1}b-0)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$



Genelleştirilmiş integral yakınsaktır.
$\frac{1}{1+x^2}>0$ olduğundan genelleştirilmiş integral eğri ile x-ekseni arasında kalan alanı gösterir.

Örnek 3: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ integrali

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ integrali p'nin hangi değerleri için yakınsaktır? Yakınsaksa değeri nedir.

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

$p=1$ ise $\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty.$

$\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$ genelleştirilmiş integrali $p>1$ için yakınsak ve değeri $\frac{1}{p-1}$ dir, $p\le 1$ için ise ıraksaktır. Yani

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p\le 1\end{cases}$$

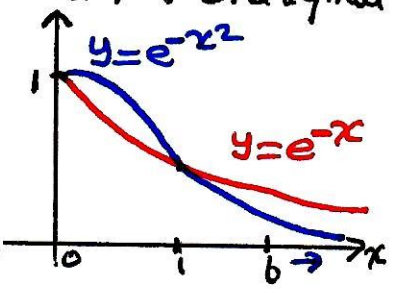
dir.

Yakınsaklık ve Iraksaklık Testleri

Bazı genelleştirilmiş integralleri hesaplamayabiliriz, fakat yakınsak olup olmadığını bulabiliriz. Eğer yakınsak ise integralin değerini yaklaşık olarak bulurur.

Örnek: $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ integrali yakınsak mıdır?

e^{-x^2}'nin belirsiz integralini hesaplamayacağımızdan, bu genelleştirilmiş integralin tam değerini bulamayız. $[1,\infty)$ aralığında $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ dir.



$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{x^2}dx \leq \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \frac{1}{e} \approx 0.3678$$

olduğundan yakınsaktır.

Teorem: Doğrudan Karşılaştırma Testi

$[a,\infty)$ aralığında $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olmak üzere, f ve g sürekli ise

1) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ yakınsaktır.

2) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ıraksak ise $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ıraksaktır.

Örnek: a) $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ integralini inceleyelim.

$[1,\infty)$ aralığında $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ve $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ $p=2>1$ yakınsak olduğundan, verilen genelleştirilmiş integral yakınsaktır.

b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}}dx$ integrali $[1,\infty)$ aralığında $\frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{x}$ ve $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ $p=1\leq 1$ ıraksak olduğundan $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}}$ integrali ıraksaktır.

Teorem: Karşılaştırma Testinin Limit Şekli (Limit Karşılaştırma Testi)
$[a,\infty)$ aralığında pozitif f ve g fonksiyonları sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ olsun.

1) $0<L<\infty$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ ve $\int_a^\infty g(x)dx$ aynı karakterdedir.

2) $L=0$ ise $\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsaktır.

3) $L=\infty$ ise $\int_a^\infty g(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksaktır.

Örnek 1: $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ integralinin yakınsak olduğunu $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ile karşılaştırarak gösteriniz. İki integralin değerlerini bularak kıyaslayınız.

$[1,\infty)$ aralığında $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ve $g(x)=\frac{1}{x^2}$ pozitif ve sürekli fonksiyonlardır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/1+x^2}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1=L$$

olduğundan $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ ve $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ integralleri aynı karakterdedir.

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ $(p=2>1)$ yakınsak olduğundan $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ yakınsaktır.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2-1}=1 \quad , \quad \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\tan^{-1}b-\tan^{-1}1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

Örnek 2: $\int_1^\infty \sqrt{x}\,e^x dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyinz.

$[1,\infty)$ aralığında $f(x)=\sqrt{x}\,e^x$ ve $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ pozitif ve süreklidirler.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\,e^x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}xe^x=\infty \quad \text{ve} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad p=\frac{1}{2}<1$$

ıraksak olduğundan $\int_1^\infty \sqrt{x}\,e^x dx$ ıraksaktır.

Örnek 3: $\int_1^\infty \frac{dx}{e^{x^2}+x^3}$ integralini inceleyiniz.

$[1,\infty)$ aralığında $f(x)=\frac{1}{e^{(x^2)}+x^3}$ ve $g(x)=\frac{1}{x^2}$ pozitif ve süreklidirler.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{(x^2)}+x^3}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}+3x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(2+4x^2)e^{x^2}+6x}=0$$

ve $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ $(p=2>1)$ yak. olduğundan verilen integral yakınsaktır.

Tanım: II. Tip Genelleştirilmiş İntegraller

1) $(a,b]$ aralığında $f(x)$ sürekli ve $f(a)=\pm\infty$ ise

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

2) $[a,b)$ aralığında $f(x)$ sürekli ve $f(b)=\pm\infty$ ise

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

3) $a<c<b$ olmak üzere $f(c)=\pm\infty$ ve $[a,c)\cup(c,b]$'de $f(x)$ sürekliyse

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bu limitler sonlu ise genelleştirilmiş integrallere <u>yakınsak</u> ve integralin değeri limit olarak tanımlanır. Limit sonlu değilse genelleştirilmiş integrale <u>ıraksak</u> denir.

Örnek 1: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$[0,1)$ aralığında $f(x)=\frac{1}{1-x}$ sürekli ve $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty$ dur.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{1-x} = \lim_{b\to 1^-} \left(-\ln|1-x|\right|_0^b = \lim_{b\to 1^-} \left(-\ln|1-b|-0\right) = \infty$$

Genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Örnek 2: $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^b + \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_c^3$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left(3(b-1)^{1/3}+3\right) + \lim_{c\to 1^+} \left(3\sqrt[3]{2} - 3(c-1)^{1/3}\right)$$

$$= 3+3\sqrt[3]{2}$$

Örnek 3: $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ integralini hesaplayınız.

$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$, eğer $f(x)=\frac{1}{x-1}$ fonksiyonunun $x=1$'de süreksizliğini dikkate almazsanız, bu hatalı sonucu elde edersiniz. Doğru hesap aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^b = \lim_{b\to 1^-} \ln|b-1| = -\infty.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ ıraksak olduğundan $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ ıraksaktır.